Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 19/20.

Feuille de TD $n°3$

Exercice 1.

1. Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & -x_3 & & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 3 \\ & x_2 & -x_3 & & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

2. La matrice associée au système précédent admet-elle une décomposition LU ?
3. Résoudre par la méthode de Gauss avec stratégie de pivotage partiel le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & = -7 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & = 2 \end{cases}$$

4. La matrice associée au système précédent admet-elle une décomposition LU ?

Exercice 2.

1. Réaliser la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = (0, 2, -1, 5)^T$.
3. Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

Exercice 3. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la décomposition LU de la matrice A (i.e. $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).
2. a. Expliquer comment on peut calculer le déterminant d'une matrice A d'ordre n à partir de sa factorisation LU.
   b. Appliquer cette méthode à la matrice A.
3. En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = (0, 1, 2)^T$.

4. Soit $B = U^T A L^T$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B.

Exercice 4. Soient la matrice A et le vecteur colonne b donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 40 & 20 \\ 4 & 20 & 35 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -31 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la décomposition de Cholesky de A, puis résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Exercice 5. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système linéaire $Ax = b$ à l'aide la méthode de Gauss avec stratégie de pivotage partiel et déterminer P, L et U les facteurs de la décomposition $PA = LU$.

Exercice 6. Soit le système linéaire $Ax = b$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire le schéma itératif associé à la méthode de Jacobi permettant de donner $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$ (On précisera la matrice B_J ainsi que le vecteur c_J). Puis montrer de deux façons différentes que la méthode de Jacobi est convergente pour le système $Ax = b$.
2. Ecrire les quatre premières itérations de la méthode de Jacobi en partant de $x^{(0)} = (0,0,0,0)^t$. Puis montrer que $x^{(k)} = \frac{2^k - 1}{2^k} x^*$, où $x^* = (1,1,1,1)^t$ est la solution exacte du système $Ax = b$.
3. Ecrire le schéma itératif associé à la méthode de Gauss-Seidel permettant de donner $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$ (On précisera la matrice B_{GS} ainsi que le vecteur c_{GS}). La méthode de Gauss-Seidel est elle convergente pour ce système ? (Justifier votre réponse).

Exercice 7.

1. Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées aux matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Que peut-on déduire ?

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.
2. Montrer que la méthode de *Jacobi* converge si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

Solution 1.

1. Elimination de Gauss

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & -x_3 & & =2\\ -x_1 & +x_2 & & +2x_4 & =3\\ & x_2 & -x_3 & & =1\\ 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & -x_3 & & =2\\ & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =5\\ & x_2 & -x_3 & & =1\\ & 7x_2 & +2x_3 & -x_4 & =-4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & -x_3 & & =2\\ & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =5\\ & & -\frac{3}{2}x_3 & +x_4 & =\frac{7}{2}\\ & & -\frac{3}{2}x_3 & +6x_4 & =\frac{27}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & -x_3 & & =2\\ & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =5\\ & & -\frac{3}{2}x_3 & +x_4 & =\frac{7}{2}\\ & & & +5x_4 & =10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & =1\\ x_2 & =0\\ x_3 & =-1\\ x_4 & =2. \end{array}\right.$$

Matriciellement, on a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 7 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 6 & \frac{27}{2} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & -x_3 & & =2\\ & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =5\\ & & -\frac{3}{2}x_3 & +x_4 & =\frac{7}{2}\\ & & & 5x_4 & =10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & =1\\ x_2 & =0\\ x_3 & =-1\\ x_4 & =2. \end{array}\right.$$

2. Oui, car on a effectuer l'élimination de Gauss sans aucun changement du pivot.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & +x_4 & =0\\ 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & =-7\\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =4\\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & =2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & =-7\\ 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & +x_4 & =0\\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =4\\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & =2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & =-7 \\ & & -\frac{14}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{14}{3} \\ & 3x_2 & +\frac{7}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{5}{3} \\ & -x_2 & -\frac{13}{3}x_3 & +\frac{5}{3}x_4 & =\frac{13}{3} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & =-7 \\ & 3x_2 & +\frac{7}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{5}{3} \\ & & -\frac{14}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{14}{3} \\ & -x_2 & -\frac{13}{3}x_3 & +\frac{5}{3}x_4 & =\frac{13}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & =-7 \\ & 3x_2 & +\frac{7}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{5}{3} \\ & & -\frac{14}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{14}{3} \\ & & -\frac{32}{9}x_3 & +\frac{22}{9}x_4 & =\frac{44}{9} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & =-7 \\ & 3x_2 & +\frac{7}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{5}{3} \\ & & -\frac{14}{3}x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & =\frac{14}{3} \\ & & & +\frac{2}{3}x_4 & =\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & =1 \\ x_2 & =-1 \\ x_3 & =0 \\ x_4 & =2. \end{array}\right.$$

4. La matrice associée au système (notée par A) n'admet pas la décomposition LU (car, on a trouvé un pivot nul, lors de la résolution du système par la méthode de Gauss). Cependant, cette matrice admet une décomposition de type $PA = LU$ (car elle est inversible).

Solution 2.

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Si A admet une décomposition LU, alors cette décomposition est donnée par :

$$A = LU, \text{ avec } L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1} \text{ et } U = A^{(3)}.$$

Calculons les matrices $A^{(i)}$ et L_i.

$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(1)} = L_1A^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(2)} = L_2A^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(3)} = L_3A^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les facteurs de la décomposition $A = LU$ sont :

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1. *Si la matrice L_j, $1 \leq j \leq n-1$ est donnée par :*

$$L_j = \begin{array}{c} \textit{colonne } j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ell_{j+1,j} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ell_{n,j} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ \textit{ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Alors, la matrice inverse L_j^{-1} de L_j est donnée par :

$$L_j^{-1} = \begin{array}{c} \textit{colonne } j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\ell_{j+1,j} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\ell_{n,j} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ \textit{ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

2.

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LUx = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

D'une part,

$$Ly = b \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} y_1 & & & & = & 0 \\ -y_1 & +y_2 & & & = & 2 \\ 2y_1 & & +y_3 & & = & -1 \\ -3y_1 & +2y_2 & -y_3 & +y_4 & = & 5 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & 0 \\ y_2 & = & 2 \\ y_3 & = & -1 \\ y_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

D'autre part,

$$Ux = y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & & = & 0 \\ & 2x_2 & & +8x_4 & = & 2 \\ & & x_3 & -x_4 & = & -1 \\ & & & -4x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & -1 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

3. $1^{\text{ère}}$ **méthode :**

$$A^2x = b \quad \Leftrightarrow \quad (LU)^2x = b \quad \Leftrightarrow \quad LULUx = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Lt = b, \\ Lz = t, \\ Ly = z, \\ Ux = y. \end{cases}$$

$2^{\text{ème}}$ **méthode :**

$$A^2x = b \quad \Leftrightarrow \quad AAx = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ay = b, & \rightarrow \quad \text{déja trouvée} \\ Ax = y. \end{cases}$$

et

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad LUx = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Lz = y, \\ Ux = z. \end{cases}$$

Solution 3.

1. $A = LU$, avec $L = L_1^{-1}L_2^{-1}$ et $U = A^{(2)}$.

$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(1)} = L_1A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(2)} = L_2A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$U = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = L_1^{-1}L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a. Si A est décomposée en LU (i.e. $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure). Alors,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L)\det(U) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \ell_{ii}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}\right), \end{aligned}$$

car L et U sont des matrices triangulaires.

b.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L)\det(U) \\ &= \Big(1 \times 1 \times 1\Big)\Big(2 \times 3 \times 5\Big) \\ &= 30. \end{aligned}$$

3.

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LUx = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \text{(Résolution de deux systèmes triangulaires).}$$

On trouve comme solution : $x = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})^T$.

4.

$$B = U^T A L^T = \underbrace{U^T L}_{L'} \underbrace{U L^T}_{U'} = L'U'.$$

Solution 4.

Dans cet exercice, nous allons voir que, dans le cas d'une matrice symétrique définie positive A, il existe une factorisation (dite de Cholesky) ne faisant intervenir qu'une seule matrice B. La factorisation de Cholesky est parfois appelée "factorisation LL^T". Nous éviterons cette terminologie pour éviter toute confusion avec la factorisation LU.

Théorème 1. *(Décomposition de Cholesky)*
Pour toute matrice réelle A symétrique définie positive, il existe une matrice triangulaire inférieure B telle que

$$A = BB^T.$$

De plus, cette décomposition est unique si les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs.

Rappel 1. *Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. Elle est dite définie positive si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1. *Pour tout vecteur colonne non nulle x à n éléments réels, on a*

$$x^T A x > 0 \qquad \text{(c'est la définition).}$$

2. *Toutes les valeurs propres de A (qui sont nécessairement réelles) sont strictement positives.*
3. *Les n déterminants des sous matrices principales de A sont tous strictement positifs, i.e., si $\det(A_k) > 0$, pour $k = 1, \ldots, n$ et où $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$.*

Rappel 2. *Une matrice carrée A est dite symétrique si elle vérifie : $A^T = A$.*

Maintenant, on revient à notre exercice. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 40 & 20 \\ 4 & 20 & 35 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -31 \end{pmatrix}.$$

◇ La matrice A étant symétrique définie positive, (A est définie positive car $\det(A_1) = 16 > 0$, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 40 \end{vmatrix} = 576 > 0$ et $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 40 & 20 \\ 4 & 20 & 35 \end{vmatrix} = 14400 > 0$). Elle admet donc une factorisation de cholesky sous la forme $A = BB^T$, où B est une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Pour déterminer la matrice B, on effectue un calcul direct du produit BB^T avec :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \gamma & \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

On obtient,

$$A = BB^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+\delta^2 & \beta\gamma+\delta\lambda \\ \alpha\gamma & \beta\gamma+\delta\lambda & \gamma^2+\lambda^2+\mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 40 & 20 \\ 4 & 20 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = 16 \\ \alpha\beta = 8 \\ \alpha\gamma = 4 \\ \beta^2+\delta^2 = 40 \\ \beta\gamma+\delta\lambda = 20 \\ \gamma^2+\lambda^2+\mu^2 = 35 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \\ \delta = 6 \\ \lambda = 3 \\ \mu = 5. \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

◇ L'un des intérêts de la factorisation de Cholesky réside dans la résolution de systèmes linéaires. Plus précisément, la résolution de $Ax = b$ d'inconnue x se ramène à la résolution de deux systèmes triangulaires. En effet :

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad BB^Tx = b \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} By = b \\ B^Tx = y. \end{array} \right.$$

Tout d'abord, on détermine l'unique $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ tel que :

$$By = b \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llllr} 4y_1 & & & = & 12 \\ 2y_1 & +6y_2 & & = & -12 \\ y_1 & +3y_2 & +5y_3 & = & -31 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 3 \\ y_2 = -3 \\ y_3 = -5. \end{array} \right.$$

Après, On cherche l'unique $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ tel que :

$$B^Tx = y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llllr} 4x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & 6x_2 & +3x_3 & = & -3 \\ & & 5x_3 & = & -5 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1. \end{array} \right.$$

On a alors $Ax = BB^Tx = By = b$, i.e., $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est bien la solution recherchée.

Solution 5.

$\diamond$ On pose

$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^{(0)} = b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier, on met tout d'abord notre système linéaire sous forme d'un tableau :

$$\left(A^{(0)} \mid b^{(0)}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 3 & 6 & 8 & 22 \end{array}\right).$$

Après, on commence par la recherche de pivot maximal dans la première colonne de $A^{(0)}$. Comme ce pivot se trouve en quatrième ligne (plus précisément le pivot est égal à 6), on échange les lignes 1 et 4 de $A^{(0)}$, c'est-à-dire si P_1 est la matrice de permutation qui échange la première ligne et la quatrième ligne, i.e.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on calcule $\tilde{A}^{(0)} = P_1 A^{(0)}$ et $\tilde{b}^{(0)} = P_1 b^{(0)}$, on trouve

$$\left(\tilde{A}^{(0)} \mid \tilde{b}^{(0)}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 6 & 8 & 22 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Ensuite, on effectue la première étape de la méthode de Gauss sur la matrice $\tilde{A}^{(0)}$ et le vecteur $\tilde{b}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \ell_2 &\leftarrow \ell_2 - \frac{4}{6}\ell_1 = \ell_2 - \boxed{\tfrac{2}{3}}\,\ell_1, \\ \ell_3 &\leftarrow \ell_3 - 0\ell_1 = \ell_3 - \boxed{0}\,\ell_1, \\ \ell_4 &\leftarrow \ell_4 - \frac{2}{6}\ell_1 = \ell_4 - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{forment} \\ \text{la 1ère} \\ \text{colonne} \\ \text{de } L}}{\boxed{\tfrac{1}{3}}}\,\ell_1. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\boxed{\frac{2}{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \\ -\boxed{\frac{1}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par ce calcul, on détermine à la fois L_1, $A^{(1)}$ et $b^{(1)}$, où

$$\left(A^{(1)} \mid b^{(1)}\right) = \left(L_1\tilde{A}^{(0)} \mid L_1\tilde{b}^{(0)}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 6 & 8 & 22 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right).$$

Ceci correspond à la première étape de la décomposition $PA = LU$.

De la même manière, dans la deuxième étape, en multipliant $A^{(1)}$ et $b^{(1)}$ à gauche par la matrice de permutation $P_2 = I_4$, car il n'y a pas de permutation de lignes à faire. On obtient,

$$\tilde{A}^{(1)} = P_2 A^{(1)} = A^{(1)} \quad \text{et} \quad \tilde{b}^{(1)} = P_2 b^{(1)} = b^{(1)}.$$

Puis, on effectue la deuxième étape de la méthode de Gauss sur la matrice $\tilde{A}^{(1)}$ et le vecteur $\tilde{b}^{(1)}$, c'est-à-dire on détermine L_2, $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$:

$$\begin{array}{l} \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \boxed{1}\ \ell_2, \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{forment} \\ \text{la 2ème} \\ \text{colonne} \\ \text{de } L}}{\boxed{0}}\ \ell_2. \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et,

$$\left(A^{(2)} \mid b^{(2)}\right) = \left(L_2 \tilde{A}^{(1)} \mid L_2 \tilde{b}^{(1)}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 6 & 8 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{7} & \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right).$$

Ceci correspond à la deuxième étape de la décomposition $PA = LU$.
De la même façon, on trouve que $P_3 = I_4$ (I_4 est la matrice identité d'ordre 4), car il n'y a pas de permutation ! Par suite,

$$\tilde{A}^{(2)} = P_3 A^{(2)} = A^{(2)} \quad \text{et} \quad \tilde{b}^{(2)} = P_3 b^{(2)} = b^{(2)}.$$

Après, on effectue la troisième étape de la méthode de Gauss, on obtient

$$\ell_4 \leftarrow \ell_4 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{forme} \\ \text{la 3ème} \\ \text{colonne} \\ \text{de } L}}{\boxed{\tfrac{2}{7}}}\ \ell_3 \qquad \Rightarrow \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{2}{7}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Et,

$$\left(A^{(3)} \mid b^{(3)}\right) = \left(L_3 \tilde{A}^{(2)} \mid L_3 \tilde{b}^{(2)}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 6 & 8 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 7 & \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{10}{7} \end{array}\right).$$

Finalement, on a obtenu la factorisation recherchée $PA = LU$, où

$$P = P_3 P_2 P_1 = P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 7 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

◇ Nous revenons maintenant à la résolution du système linéaire $Ax = b$. Le dernier tableau implique que :

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 6x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +8x_4 & = & 22 \\ & x_2 & -2x_3 & -\frac{4}{3}x_4 & = & -\frac{8}{3} \\ & & 7x_3 & +\frac{10}{3}x_4 & = & \frac{20}{3} \\ & & & -\frac{5}{7}x_4 & = & -\frac{10}{7}. \end{array} \right.$$

Par application de l'algorithme de remontée au système triangulaire ci-dessus, on obtient :

$$x = (1, 0, 0, 2)^T.$$

Solution 6. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Le système linéaire $Ax = b$ s'écrit :

$$(*) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & -\frac{1}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 & = \frac{1}{2} \\ & x_2 & -\frac{1}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 & = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_2 & +x_3 & & = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_2 & & +x_4 & = \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

d'où le schéma itératif de la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1^{(k+1)} & & -\frac{1}{4}x_3^{(k)} & -\frac{1}{4}x_4^{(k)} & = \frac{1}{2} \\ & x_2^{(k+1)} & -\frac{1}{4}x_3^{(k)} & -\frac{1}{4}x_4^{(k)} & = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_1^{(k)} & -\frac{1}{4}x_2^{(k)} & +x_3^{(k+1)} & & = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_1^{(k)} & -\frac{1}{4}x_2^{(k)} & & +x_4^{(k+1)} & = \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{cccc} x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_3^{(k)} & +\frac{1}{4}x_4^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_3^{(k)} & +\frac{1}{4}x_4^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1^{(k)} & +\frac{1}{4}x_2^{(k)} \\ x_4^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1^{(k)} & +\frac{1}{4}x_2^{(k)}, \end{array} \right.$$

c-à-d $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + c_J$ avec

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Montrons de deux façons différentes que la méthode de Jacobi est convergente pour le système $Ax = b$.

<u>$1^{\text{ère}}$ **méthode :**</u> Comme A est une matrice à diagonale strictement dominante alors A est inversible. De plus, la méthode de Jacobi appliquée à A est convergente.

<u>$2^{\text{ème}}$ **méthode :**</u> On doit vérifier que $\rho(B_J) < 1$.
Pour cela, on doit calculer le polynôme caractéristique de B_J pour déterminer les valeurs propres de B_J.

$$\det(B_J - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}-\lambda & -\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{2}-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\lambda & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\frac{1}{2}-\lambda)\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\frac{1}{2}-\lambda)\big((\frac{1}{4}+\lambda)^2 - \frac{1}{16}\big)$$

$$= \lambda(\lambda - \frac{1}{2})\big(\lambda^2 + 2\frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\big) = \lambda^2(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2}).$$

D'où, les valeurs propres de B_J sont :
$\lambda_1 = 0$ (valeur propre double), $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ (valeurs propres simples).
Ainsi, $\rho(B_J) = \frac{1}{2} < 1$. Donc, la méthode de Jacobi converge.

2. En partant de $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$, on trouve que

$$x^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,$$

$$x^{(2)} = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})^T = \frac{3}{4}(1,1,1,1)^T,$$

$$x^{(3)} = (\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})^T = \frac{7}{8}(1,1,1,1)^T,$$

$$x^{(4)} = (\frac{15}{16}, \frac{15}{16}, \frac{15}{16}, \frac{15}{16})^T = \frac{15}{16}(1,1,1,1)^T.$$

Par récurrence, on peut montrer que $x^{(k)} = \frac{2^k-1}{2^k}x^*$.

En effet, la relation est vraie à l'ordre $k=1$. Si on suppose que c'est vrai à l'ordre k, alors

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= B_J x^{(k)} + c_J \\
&= \frac{2^k-1}{2^k}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \Big(\frac{2^k-1}{2^k} + \frac{1}{2}\Big)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} x^*. && \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

3. Tout d'abord, la méthode de Gauss-Seidel est convergente, car A est à diagonale strictement dominante.
   $(*) \Rightarrow$ que le schéma itératif de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lllll}
x_1^{(k+1)} & & -\frac{1}{4}x_3^{(k)} & -\frac{1}{4}x_4^{(k)} & = \frac{1}{2} \\
 & x_2^{(k+1)} & -\frac{1}{4}x_3^{(k)} & -\frac{1}{4}x_4^{(k)} & = \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} & -\frac{1}{4}x_2^{(k+1)} & +x_3^{(k+1)} & & = \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} & -\frac{1}{4}x_2^{(k+1)} & & +x_4^{(k+1)} & = \frac{1}{2},
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{llllll}
x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_3^{(k)} & +\frac{1}{4}x_4^{(k)} & & \\
x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_3^{(k)} & +\frac{1}{4}x_4^{(k)} & & \\
x_3^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} & +\frac{1}{4}x_2^{(k+1)} & = \frac{3}{4} & +\frac{1}{8}x_3^{(k)} \quad +\frac{1}{8}x_4^{(k)} \\
x_4^{(k+1)} & = \frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} & +\frac{1}{4}x_2^{(k+1)} & = \frac{3}{4} & +\frac{1}{8}x_3^{(k)} \quad +\frac{1}{8}x_4^{(k)},
\end{array}\right.$$

   c-à-d $x^{(k+1)} = B_{GS}x^{(k)} + c_{GS}$ avec

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_{GS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

   Dans ce cas, les premières itérations sont :

$$x^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})^T, \quad x^{(2)} = (\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{15}{16})^T, \quad x^{(3)} = (\frac{31}{32}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{63}{64})^T$$

   et on peut montrer que $x^{(k)} = \frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k-1}}e_1 + \frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}e_2$ avec $e_1 = (1,1,0,0)^T$ et $e_2 = (0,0,1,1)^T$. On remarque aussi que la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi (en fait deux fois plus vite).

Si on veut détermier le polynôme caractéristique de B_{GS}, on procède ainsi :

$$\det(B_{GS}-\lambda I_4)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}-\lambda & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=-\lambda^3(\frac{1}{4}-\lambda)=\lambda^3(\lambda-\frac{1}{4}) \quad \Rightarrow \quad \rho(B_{GS})=\frac{1}{4}<1.$$

Donc la méthode de Gauss-Seidel appliquée à A est convergente $\forall x^{(0)}$.

Solution 7.

1. Soit

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

◇ Le schéma itératif de la méthode de Jacobi appliquée à A_1 est tel que

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1^{(k+1)} & +2x_2^{(k)} & -2x_3^{(k)} & =b_1 \\ x_1^{(k)} & +x_2^{(k+1)} & +x_3^{(k)} & =b_2 \\ 2x_1^{(k)} & +2x_2^{(k)} & +x_3^{(k+1)} & =b_3, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccc} x_1^{(k+1)} & =b_1 & -2x_2^{(k)} & +2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & =b_2 & -x_1^{(k)} & -x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} & =b_3 & -2x_1^{(k)} & -2x_2^{(k)}, \end{array}\right.$$

ce qui fait que $B_J=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\det(B_J-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda-2 & 2 \\ -1 & -\lambda+1 & -1 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$=-2\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -\lambda+1 & -1 \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda-2 \\ -1 & -\lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$=-2\big(-(\lambda-2)-2(-\lambda+1)\big)-\lambda\big(-\lambda(-\lambda+1)+(\lambda-2)\big)$$
$$=-2\big(-\lambda+2+2\lambda-2\big)-\lambda\big(\lambda^2-\lambda+\lambda-2\big)$$
$$=-2\lambda-\lambda\big(\lambda^2-2\big)=-\lambda^3.$$

Donc, 0 est une valeur propre triple de B_J et par suite $\rho(B_J)=0<1$. Ainsi, la méthode de Jacobi est convergente pour A_1, $\forall x^{(0)}$.

◇ Le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel appliquée à A_1 est tel que

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1^{(k+1)} & +2x_2^{(k)} & -2x_3^{(k)} & =b_1 \\ x_1^{(k+1)} & +x_2^{(k+1)} & +x_3^{(k)} & =b_2 \\ 2x_1^{(k+1)} & +2x_2^{(k+1)} & +x_3^{(k+1)} & =b_3, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccc} x_1^{(k+1)} & =b_1 & -2x_2^{(k)} & +2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & =b_2 & -x_1^{(k+1)} & -x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} & =b_3 & -2x_1^{(k+1)} & -2x_2^{(k+1)}, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccc} x_1^{(k+1)} & =b_1 & -2x_2^{(k)} & +2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & =c_2 & +2x_2^{(k)} & -3x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} & =c_3 & +2x_3^{(k)}, & \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad B_{GS}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par suite,
$$\det(B_{GS}-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2.$$
Ainsi, $\rho(B_{GS})=2>1$ et donc la méthode de Gauss-Seidel n'est pas convergente s'elle est appliquée à la matrice A_1.

◇ Pour la matrice A_2, en faisant une démarche similaire à celle appliquée à A_1, on trouve
$$B_J=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
Et on a
$$\det(B_J-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\lambda & -\lambda-1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}-(\lambda-\frac{1}{2})\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)\big(-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\big)-(\lambda-\frac{1}{2})\big(\lambda^2+\frac{1}{2}\big)=-\lambda(\lambda^2+\frac{5}{4}).$$
Ainsi, les valeurs propres de B_J sont : $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_3=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Doù, $\rho(B_J)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$ et donc la méthode de Jacobi diverge.

◇ De même, on trouve
$$B_{GS}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
et $\det(B_{GS}-\lambda I_3)=\ldots=-\lambda(\lambda-\frac{1}{2})^2$. Ainsi, les vps de B_{GS} sont : $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2}$. D'où $\rho(B_{GS})=\frac{1}{2}<1$ et la méthode de Gauss-Seidel converge.

2. On déduit que la convergence de la méthode de Gauss-Seidel n'implique pas celle de Jacobi et vece versa. Cependant, dans le cas où on a la convergence des deux méthodes à priori la méthode de Gauss-Seidel est la plus rapide.

Solution 8.

1. Soit $a\in\mathbb{R}$, on a $A^T=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}=A\Rightarrow A$ est symétrique. Par ailleurs, le polynôme caractéristique de A est donné par :
$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a+1-\lambda & a & a \\ 2a+1-\lambda & 1-\lambda & a \\ 2a+1-\lambda & a & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 2a+1-\lambda & a & a \\ 0 & 1-a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-a-\lambda \end{vmatrix}=\Big((2a+1)-\lambda\Big)\Big((1-a)-\lambda\Big)^2.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2a+1 \qquad \text{(valeur propre simple)} \\ \lambda_2 &= 1-a \qquad \text{(valeur propre double)} \end{aligned}$$

Rappel 3. *A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont sont strictement positives.*

Or,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 & > 0 \\ \lambda_2 & > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2a+1 & > 0 \\ 1-a & > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a & > -\frac{1}{2} \\ 1 & > a. \end{array} \right.$$

D'où A est symétrique définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.

2. Déterminons la matrice de Jacobi B_J. Il est facile de voir que

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P_{B_J}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a & -a \\ -a & -\lambda & -a \\ -a & -a & -\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ a & a & \lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda+2a & a & a \\ \lambda+2a & \lambda & a \\ \lambda+2a & a & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \lambda+2a & a & a \\ 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{vmatrix} = -(\lambda+2a)(\lambda-a)^2.$$

$\Rightarrow$ les valeurs propres de B_J sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2a \qquad \text{(valeur propre simple)} \\ \lambda_2 &= a \qquad \text{(valeur propre double)} \end{aligned}$$

Ainsi $\rho(B_J) = |2a|$, par conséquence la méthode de Jacobi converge si et seulement si $|2a| < 1$, i.e., si $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.